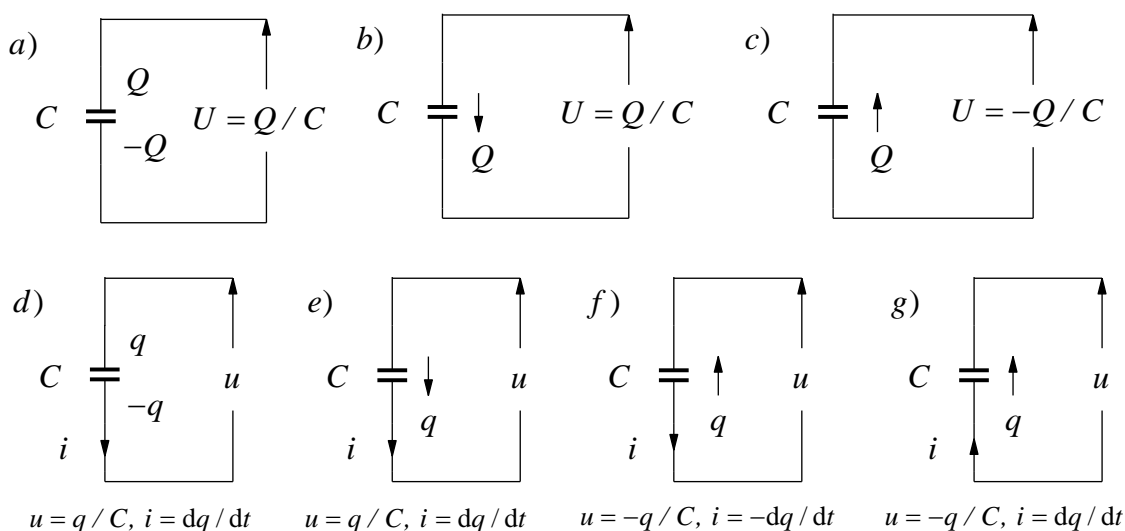


1. Vezivanje kondenzatora u grupe

Kondenzatori se u grupu mogu vezati *redno*, *paralelno* i *mešovito* (*redno-paralelno*). Svaka grupa između svoja dva kraja može se zameniti jednim kondenzatorom odgovarajuće *ekvivalentne kapacitivnosti*. Ekvivalentnost grupe i jednog kondenzatora znači da kada se grupa zameni tim kondenzatorom, u ostatku kola ništa se ne menja u pogledu raspodele napona i struja grana. Zamena grupe *ekvivalentnim* kondenzatorom je postupak koji se često koristi u *analizi električnih kola*.

Na sl. 1a, 1b i 1c prikazane su *konvencije o označavanju* vezane za opterećeni kondenzator kapacitivnosti C sa konstantnim naponom U između elektroda, kao i *lokalne* relacije koje povezuju veličine Q i U . Kod opterećenog kondenzatora U , Q i $-Q$ predstavljaju algebarske vrednosti napona kondenzatora i naelektrisanja elektroda. Na sl. 1d, 1e, 1f i 1g prikazane su konvencije o označavanju vezane za kondenzator kapacitivnosti C sa vremenski promenljivim naponom u između elektroda, vremenski promenljivim naelektrisanjima elektroda q i $-q$, i promenljivom strujom i kroz granu sa kondenzatorom. Takođe, date su i *konstitutivne* (*lokalne*) relacije koje povezuju veličine q , u i i . Napominjemo da su i ovde vrednosti veličina q , u i i algebarske, s obzirom da kod složenih mreža, unapred nije moguće znati *stvarni znak* naelektrisanja elektroda.



Sl. 1

- **Konstitutivne relacije.** U prvom koraku kondenzatoru se dodeljuju referentni smerovi za naelektrisanje i napon, dok se u sledećem formuliše konstitutivna relacija koja povezuje algebarske vrednosti njegovog naelektrisanja i napona. Ta relacija može imati jedan od sledeća dva oblika:

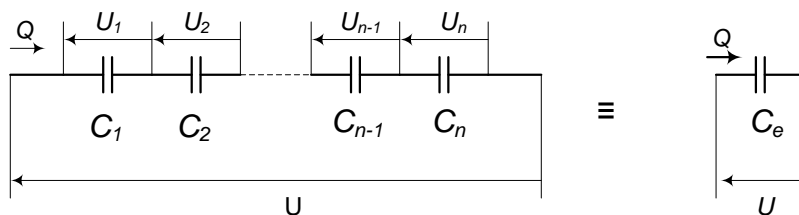
- (1) $Q = C \cdot U$ (sl. 1a i 1b), odnosno $q = C \cdot u$ (sl. 1d i 1e). U ovim slučajevima kaže se da su referentni smerovi za naelektrisanje i napon **usaglašeni**.
- (2) $Q = -C \cdot U$ (sl. 1c), odnosno $q = -C \cdot u$ (sl. 1f i 1g). U ovim slučajevima kaže se da referentni smerovi za naelektrisanje i napon **nisu usaglašeni**.

Ako se napon u kondenzatora, a time i njegovo naelektrisanje q , menjaju u toku vremena, tada u električnom kolu, ili grani električne mreže sa kondenzatorom dolazi do pojave električne struje intenziteta i .

- **Struja kondenzatora.** Struja kondenzatora označava se strelicom, koja predstavlja usvojeni (odnosno proizvoljno pretpostavljeni) algebarski ili referentni smer, u odnosu na koji se ona računa. Za taj smer vezan je algebarski intenzitet struje, koji odgovara brzini promene naelektrisanja q kondenzatora. Intenzitet struje i je $i = dq/dt$ (sl. 1d, 1e i 1g za usaglašene referentne smerove), odnosno $i = -dq/dt$ (sl. 1f. za neusaglašene ref. smerove).

(a) Redno vezivanje kondenzatora u grupu

Na sl. 2 prikazana je grupa od n redno vezanih neopterećenih kondenzatora kapacitivnosti C_i ($i = \overline{1, n}$) sa konstantnim naponom U na krajevima grupe.

**Sl. 2**

Napon kondenzatora kapacitivnosti C_i je U_i ($i = \overline{1, n}$). Kondenzator kapacitivnosti C_e *ekvivalentan* je grupi redno vezanih kondenzatora ako je pri istom naponu U njegovo naelektrisanje Q jednako naelektrisanju svakog od kondenzatora iz grupe. Pošto su referentni smerovi za naelektrisanja i napone kod svih kondenzatora usaglašeni, tada se *ekvivalentna kapacitivnost* C_e određuje iz sledećih relacija:

$$U_i = \frac{Q}{C_i} \quad (i = \overline{1, n}); \quad U = \sum_{i=1}^n U_i = Q \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \equiv \frac{Q}{C_e} \quad (\forall Q \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i},$$

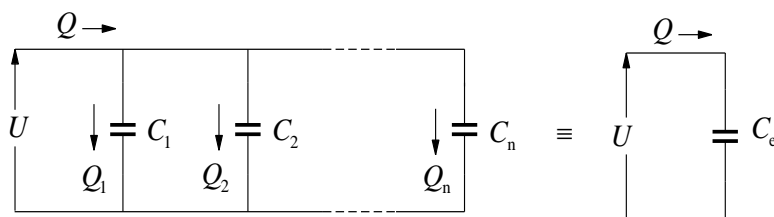
Primetimo da takođe važi:

$$U_1 : U_2 : \dots : U_n = C_n : C_{n-1} : \dots : C_1 \quad \text{i} \quad C_e < \min \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$$

što znači da je ekvivalentna kapacitivnost grupe redno vezanih kondenzatora manja od minimalne kapacitivnosti kondenzatora iz grupe.

(b) Paralelno vezivanje kondenzatora u grupu

Na sl. 3 prikazana je grupa od n paralelno vezanih, neopterećenih kondenzatora kapacitivnosti C_i ($i = \overline{1, n}$) sa konstantnim naponom U na svakom od njih.

**Sl. 3**

Kondenzator kapacitivnosti C_e *ekvivalentan* je grupi paralelno vezanih kondenzatora ako su pri istom naponu U njegovo naelektrisanje i ukupno naelektrisanje grupe jednaki. Pošto su referentni smerovi za naelektrisanja i napone kondenzatora usaglašeni, *ekvivalentna kapacitivnost* C_e određuje se iz sledećih relacija:

$$Q_i = C_i \cdot U \quad (i = \overline{1, n}); \quad Q = \sum_{i=1}^n Q_i = U \cdot \sum_{i=1}^n C_i \equiv C_e \cdot U \quad (\forall U \neq 0)$$

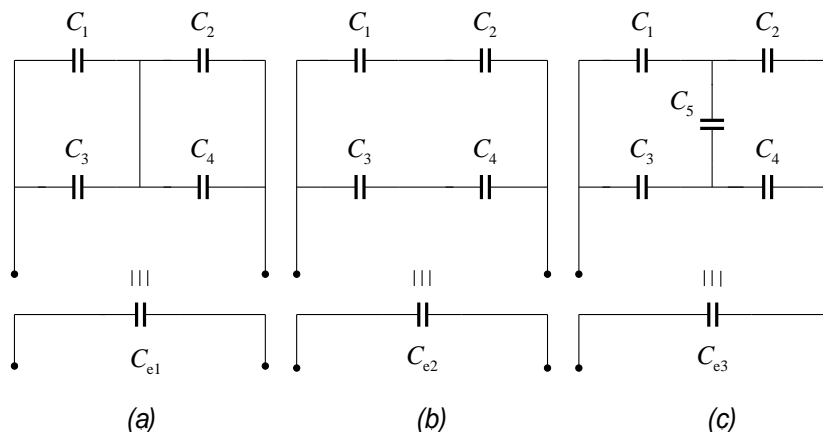
$$\Rightarrow C_e = \sum_{i=1}^n C_i.$$

Takođe važi:

$$Q_1 : Q_2 : \dots : Q_n = C_1 : C_2 : \dots : C_n \quad \text{ i } \quad C_e > \max \{ C_1, C_2, \dots, C_n \},$$

što znači da je ekvivalentna kapacitivnost C_e grupe paralelno vezanih kondenzatora veća od maksimalne kapacitivnosti kondenzatora iz grupe.

Primer: Odrediti ekvivalentne kapacitivnosti C_{e1} , C_{e2} i C_{e3} , mreža na sl. 4a, 4b i 4c.



Sl. 4

U slučajevima na sl. 4a i 4b ekvivalentne kapacitivnosti mogu se odrediti paralelno-rednim i redno-paralelnim i ekvivalentnim *transformacijama* datih kapacitivnih mreža. Međutim, kod mreže na sl. 4c takve transformacije nije moguće izvršiti, već se mora pribеći ekvivalentnoj *transfiguraciji* tipa $Y \rightarrow \Delta$ (zvezda u trougao), što će biti detaljno razmotreno u okviru Elektrokinetike. Rezultati su:

$$\text{a) } \frac{1}{C_{e1}} = \frac{1}{C_1 + C_3} + \frac{1}{C_2 + C_4} = \frac{C_1 + C_3 + C_2 + C_4}{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)} \Rightarrow C_{e1} = \frac{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$$

$$\text{b) } C_{e2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3 \cdot C_4}{C_3 + C_4}, \text{ jer je } \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

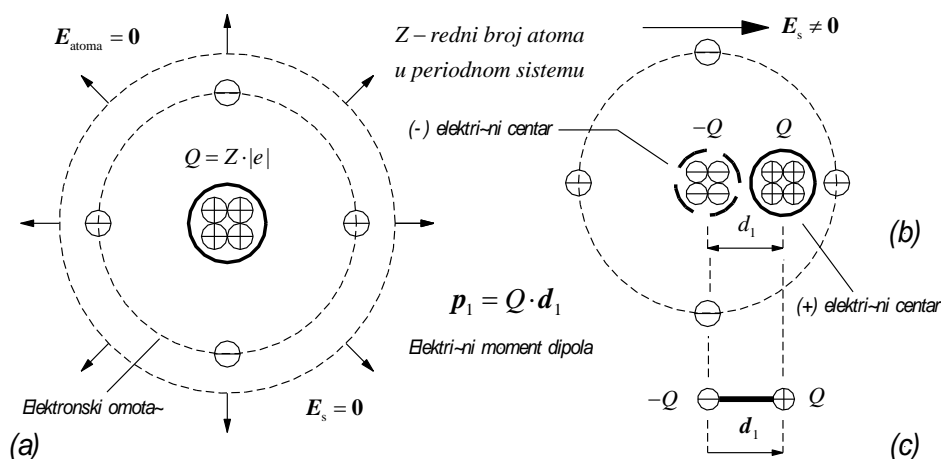
$$\text{c) } C_{e3} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4 + C_5} + \frac{(C_1 + \frac{C_3 C_5}{C_3 + C_4 + C_5})(C_2 + \frac{C_4 C_5}{C_3 + C_4 + C_5})}{C_1 + C_2 + \frac{C_3 C_5}{C_3 + C_4 + C_5} + \frac{C_4 C_5}{C_3 + C_4 + C_5}}.$$

2. Elektrostatičko polje u supstanciji i polarizacija dielektrika

Pod dielektricima ili izolatorima podrazumevaju se čvrste, tečne i gasovite supstancije koje za razliku od provodnika ne sadrže slobodna pokretljiva električna opterećenja, pre svega "slobodne" elektrone. Elementarna naelektrisanja oba znaka koja ulaze u sastav dielektrične supstancije vezana su elastičnim unutrašnjim atomskim i molekularnim silama i mogu se pod dejstvom spoljašnjeg električnog polja pomerati samo na mikroskopski mala odstojanja. Ta naelektrisanja ne mogu napustiti matične atome i molekule, osim u slučaju polja vrlo velikog intenziteta kada dolazi do *proboja dielektrika*. Proboj je kratkotrajni lavinski proces koji počinje kao čisto električna pojava, a završava se termičkom destrukcijom dielektrika. Mogućnost potpunog oporavka posle proboja, imaju samo gasoviti dielektrici, dok je kod tečnih oporavak samo delimičan, a performanse ostaju trajno degradirane. Čvrsti dielektrici posle proboja nisu više upotrebljivi. Intenzitet polja pri kome

dolazi do proboja dielektrika zove se *(di)električna čvrstoća*. U ovom kursu posmatraju se samo *izotropni* dielektrici koji imaju iste osobine u svim pravcima.

Iskustvo pokazuje da nezavisno od vrste i veličine kondenzatora postoji *konstantan* odnos između kapacitivnosti C kada je prostor između elektroda ispunjen određenom homogenim dielektrikom i kapacitivnosti C_0 kada je između elektroda vakuum. Upravo odnos $\epsilon_r = C/C_0$ karakteriše dielektrik i zove se relativna permitivnost (odnosno propustljivost), ili relativna dielektrična konstanta i ona nema dimenzije.



Sl. 5

Prethodne pojave makroskopska su posledica *polarizacije dielektrika*. Polarizacija je *elastična deformacija atoma i molekula* dielektrika pod dejstvom *spoljašnjeg* (ili *stranog*) električnog polja. Pretpostavimo da je dielektrik sastavljen od atoma sa rednim brojem Z u periodnom sistemu i da se nalazi izvan stranog električnog polja ($E_s = 0$). Tada se u svakom atomu poklapaju *ekvivalentni električni centri* pozitivnog i negativnog elektriciteta, pa je električno polje izvan atoma $E_{\text{atoma}} = 0$ (sl. 5a). Dakle, spolja gledano, atomi se tada ponašaju kao električno neutralni sistemi. Međutim, kada se dielektrik nađe u stranom električnom polju E_s (sl. 5b), na elementarna naelektrisanja u atomima i molekulima deluju Kulonove sile koje pozitivne čestice pomeraju u pravcu i smeru polja, a negativne suprotno od njega. Pomeraji čestica iz ravnotežnih položaja ograničeni su na mikroskopski mala rastojanja d_1 , s obzirom da se dejstvu stranog polja suprotstavljaju elastične unutrašnje atomske i molekularne sile, takođe elektrostatičkog porekla. Polarizacijom dielektrika razdvojeni *ekvivalentni električni centri* pozitivnog i negativnog elektriciteta u atomima (sl. 5b) formiraju *pojedinačne električne dipole* (sl. 5c). Dipol se u odnosu na okolinu ne ponaša kao električno neutralan sistem i karakteriše ga električni moment $p_1 = Q \cdot d_1 = Z|e|d_1$, gde je d_1 orijentisana dužina dipola. Dužina dipola $d_1 = |d_1|$ i njegov električni moment $p_1 = |p_1|$ utoliko su veći, ukoliko je spoljašnje (strano) pobudno električno polje $E_s = |E_s|$ jače.

Makroskopski efekti polarizacije isti su kod svih izotropnih dielektrika, ali se ipak mogu razlikovati dva osnovna tipa, s obzirom na *električnu molekularnu strukturu*, odnosno raspored elementarnih naelektrisanja u nepobuđenim *molekulima*. To su dielektrici: (1) sa *nepolarnim* molekulima (npr. H_2 , O_2) i (2) sa *polarnim* molekulima (SO_2 , H_2O , HCl , jonski kristali). Kod nepolarnih dielektrika izvan stranog polja, električni momenti molekula su nula, a kako eksperimenti pokazuju, *indukovani električni momenti dipola* u stranom polju tu su direktno proporcionalni intenzitetu polja. Međutim, kod polarnih dielektrika električni momenti molekula postoje i u odsustvu stranog polja i takođe se povećavaju sa porastom njegovog intenziteta. Dakle, u oba posmatrana slučaja imamo da je $p_1 \approx E_s$. Kod oba tipa dielektrika *dipoli teže* da svoje pojedinačne električne momente p_1 postave u pravcu i smeru stranog polja E_s .

- Makroskopska veličina koja karakteriše stanje polarizovanosti u fizički maloj zapremini δV dielektrika zove se vektor (jačine) polarizacije \mathbf{P} i definisan je na sledeći način:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}}{\delta V}, \text{ gde je } \sum \mathbf{p} \text{ vektorski zbir električnih momenata dipola u zapremini } \delta V.$$

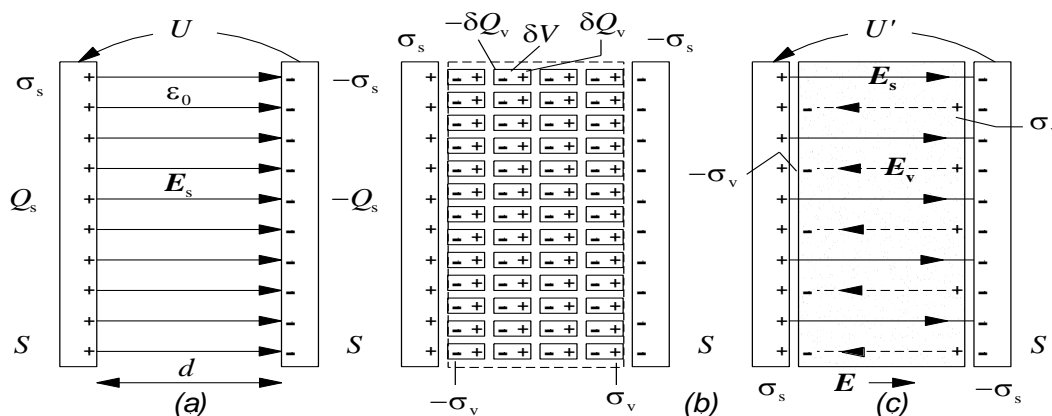
Kod homogeno polarizovanog dielektrika sa koncentracijom molekula N' , električni momenti pojedinačnih dipola su $\mathbf{p}_1 = \alpha \cdot \mathbf{E}_s$, a vektor polarizacije \mathbf{P} određen je izrazima:

$$\sum \mathbf{p} = (N' \cdot \delta V) \cdot \mathbf{p}_1 \Rightarrow \mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}}{\delta V} = N' \cdot \mathbf{p}_1 = \alpha \cdot N' \cdot \mathbf{E}_s = a \cdot \mathbf{E}_s \quad (a = \alpha \cdot N'),$$

gde je a -temperaturno zavisani koeficijent polarizacije. Lako je videti da je $P = |\mathbf{P}| (=) [\text{C/m}^2]$, tj. da intenzitet vektora polarizacije dimenziono odgovara površinskoj gustini naelektrisanja.

⇔ Polarizovani dielektrik u električnom pogledu ekvivalentan je mnoštvu mikroskopski malih dipola u vakuumu. Rezultantno polje slobodnih naelektrisanja u prisustvu dielektrika superpozicija je polja tih naelektrisanja i polja mnoštva dipola u vakuumu. Element zapremine dielektrika δV na mestu gde je intenzitet polarizacije \mathbf{P} , ekvivalentan je dipolu električnog momenta $\delta \mathbf{p} = \mathbf{P} \cdot \delta V$.

Posmatrajmo pločasti kondenzator sa vakuumskim dielektrikom naelektrisan količinom elektriciteta $Q_s > 0$ (sl. 6a), kod koga se ivični efekti mogu zanemariti. Površinska gustina slobodnog elektriciteta na pločama je konstantna $\pm \sigma_s = \pm Q_s/S$ ($\sigma_s > 0$; S -površina ploča), a električno polje u kondenzatoru je homogeno. Intenzitet polja slobodnih naelektrisanja u vakuumu je $E_s = |\mathbf{E}_s| = \sigma_s/\epsilon_0 = Q_s/(\epsilon_0 S)$. Kada se u prostor između elektroda unese homogeni dielektrik, on će se pod dejstvom polja \mathbf{E}_s homogeno polarizovati, tako da će se formirati mnoštvo dipola orijentisanih u pravcu linija polja (sl. 6b). Dejstva naelektrisanja susednih dipola u nizu neutrališu se, a nekompenzovana ostaju samo naelektrisanja krajnjih dipola.



Sl. 6

Pošto je polarizacija homogena, njen konačni efekat je da na površ dielektrika uz pozitivnu elektrodu izbijaju negativna, a na površ uz negativnu elektrodu pozitivna vezana naelektrisanja dipola. Veličina površinske gustine vezanih naelektrisanja σ_v ista je u svim tačkama čeonih površi dielektrika uz elektrode (sl. 6b i 6c).

Element dielektrika zapremine $\delta V = \delta S \cdot \delta l$ (δl je dužina elementa u pravcu polja, a δS površina njegovog poprečnog preseka) može se predstaviti dipolom električnog momenta $\delta \mathbf{p} = |\delta \mathbf{p}| = |\mathbf{P}| \cdot \delta V = \mathbf{P} \cdot \delta V = \mathbf{P} \cdot \delta S \cdot \delta l = \delta Q_v \cdot \delta l$ ($\delta Q_v > 0$), gde je $\pm \delta Q_v$ vezano naelektrisanje u tom dipolu. Odatle sledi $P = \delta Q_v / \delta S = \sigma_v$, pošto je ista gustina vezanih naelektrisanja σ_v i na čeonim površima dielektrika uz elektrode kondenzatora. Površinska gustina vezanih naelektrisanja u bilo kojoj tački

na površi bilo kojeg dielektrika uvek se određuje kao $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, gde je \mathbf{P} vektor jačine polarizacije, a \mathbf{n} jedinični vektor normale na element površi u toj tački koji je uvek orijentisan od dielektrika.

Usled pojave vezanih naelektrisanja na čeonim površima dielektrika (sl. 6b i 6c), polje u kondenzatoru slabi, a napon između elektroda opada (pošto je $Q_s = C^{\text{sl}}$), tako se posredno povećava i kapacitivnost kondenzatora. Vezana površinska naelektrisanja gustine $\sigma_v = P$ stvaraju polje \mathbf{E}_v , istog pravca a suprotnog smera od polja \mathbf{E}_s , i intenziteta $E_v = |\mathbf{E}_v| = \sigma_v / \epsilon_0$. Neka je E intenzitet resultantnog električnog polja \mathbf{E} u dielektriku. Kako je $\sigma_v = P = a \cdot E$, to je sam intenzitet polja E (sl. 6c):

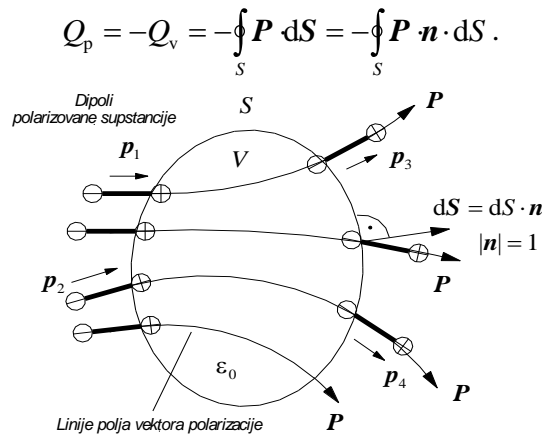
$$E = E_s - E_v = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_s - \sigma_v) = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_s - a \cdot E) \Rightarrow E = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0 + a}.$$

Ako se koeficijent polarizacije homogenog dielektrika predstavi kao $a = \epsilon_0 \cdot \chi_e$, tada je vektor jačine polarizacije u bilo kojoj tački $\mathbf{P} = \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \mathbf{E}$, gde se neimenovani broj $\chi_e \geq 0$ zove *električna susceptibilnost dielektrika*. Kada se uvedu i veličine *relativna permitivnost* $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ (tj. "relativna dielektrična konstanta") i *permitivnost* $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ (tj. "dielektrična konstanta"), konačno iz prethodne relacije sledi:

$$E = \frac{U'}{d} = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0 + a} = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0(1 + \chi_e)} = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = \frac{\sigma_s}{\epsilon} = \frac{E_s}{\epsilon_r} = \frac{U}{\epsilon_r \cdot d} \Rightarrow U' = \frac{U}{\epsilon_r}.$$

Poslednja relacija pokazuje da kada je $Q_s = C^{\text{sl}}$, intenzitet električnog polja E i napon U' između elektroda kondenzatora ϵ_r puta se smanje posle unošenja dielektrika, dok se njegova kapacitivnost $C' = Q_s / U' = \epsilon_r \cdot Q_s / U = \epsilon_r \cdot C$, ϵ_r puta poveća.

Ako se posmatra domen V ograničen orijentisanom površi S u bilo kojem polarizovanom dielektriku (sl. 7), tada ukupna količina vezanih naelektrisanja Q_v koja prilikom polarizacije napuste taj domen mora biti jednaka priraštaju količine vezanih naelektrisanja Q_p u domenu uzetom sa negativnim predznakom, tj. $Q_p = -Q_v$. Ukupan *višak vezanih naelektrisanja* Q_p koji je polarizacijom unet u površ S , kod svakog dielektrika određen je relacijom:



Sl. 7

Posmatrajmo proizvoljno odabranu zatvorenu površ S u dielektriku orijentisanu ka spoljašnjosti obuhvaćenog domena V koji sadrži određenu *količinu* Q_s slobodnih i *ukupan višak* Q_p vezanih naelektrisanja. Tada se kao električni ekvivalent svih slobodnih naelektrisanja i celokupne polarizovane supstance u domenu V može uzeti naelektrisanje $Q_s + Q_p$ smešteno u vakuumu.

Primenom Gausovog zakona na naelektrisanje $Q_s + Q_p$ obuhvaćeno sa površi S (sl. 7), dobija se najopštija relacija koja važi kod svakog dielektrika i za svaki sistem slobodnih naelektrisanja:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_s + Q_p}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(Q_s - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \right) \Rightarrow \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_s, \text{ gde je } \mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Prethodna relacija pokazuje da *izlazni* fluks vektora $\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}$ kroz bilo koju zatvorenu površ S :

- (1) ne zavisi od oblika i veličine površi i dielektričnih osobina sredine (heterogenost, anizotropnost)
- (2) da je on uvek jednak ukupnoj količini *slobodnih naelektrisanja* obuhvaćenih tom površi.

Ovaj rezultat zove se generalisani oblik Gausovog zakona, ili *Maksvelov postulat*. Vektor \mathbf{D} zove se *vektor električne indukcije*, ili *gustine električnog fluksa*, odnosno vektor *(di)električnog pomeraja*. Zamišljene linije u električnom polju orijentisane kao i \mathbf{D} sa osobinom da je u svakoj njihovoj tački vektor \mathbf{D} tangenta, zovu se *linije elektrostatičke indukcije*. Veličina $D = |\mathbf{D}|$ istih je dimenzija kao i P [C/m^2] (površinska gustina naelektrisanja). U zavisnosti od dielektrika, generalisani Gausov zakon može se predstaviti u nekoliko sledećih oblika datih u narednoj tabeli.

Vrsta dielektrika	(a) Anizotropan	(b) Izotropan	(c) Homogen
Oblici generalisanog Gausovog zakona	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_s$ $\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\oint_S \epsilon \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_s$ $\mathbf{P} = \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \mathbf{E}; \mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$	$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_s}{\epsilon}$ $\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E} \quad (\epsilon = C^{st})$

- (a) Za kompletnu predstavu polja u *anizotropnim* dielektricima potrebno je poznavati raspodelu oba vektora \mathbf{D} i \mathbf{E} , jer kod njih pravci električnog polja i polarizacije nisu kolinearni.
- (b) Kod *izotropnih* dielektrika je $\mathbf{P} = \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \mathbf{E}$ i $\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot (1 + \chi_e) \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mathbf{E} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$. Ako su oni još i linearni, ϵ je u svakoj tački konstantno (tj. ne zavisi od jačine polja). Zato je i kod *linearnih, izotropnih* i *nehomogenih* dielektrika za kompletnu predstavu polja potrebno poznavati raspodelu oba vektora \mathbf{D} i \mathbf{E} . U svakoj tački kod njih je $\mathbf{P} = \epsilon_0 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \mathbf{E}$.
- (c) Kod *homogenih* dielektrika je $\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$, gde je ϵ u svim tačkama isto. Za kompletnu predstavu polja ovde je dovoljno poznavati samo jedan od vektora (\mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{P}) i ϵ . U svakoj tački polja i ovde je $\mathbf{P} = \epsilon_0 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \mathbf{E}$, a $\forall S$ važi još i ova implikacija zbog *jedinstvenosti raspodele polja*:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_s}{\epsilon} = \frac{Q_s / \epsilon_0}{\epsilon_r} = \frac{1}{\epsilon_r} \cdot \oint_S \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r} \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r},$$

gde je \mathbf{E} polje u homogenom dielektriku, a \mathbf{E}_0 u vakuumu. Na osnovu prethodnog može se zaključiti:

- (1) *Raspodela slobodnih naelektrisanja na površima i provodnim telima je ista, bez obzira da li se oni nalaze u vakuumu ili u **homogenom dielektriku**.*
- (2) *Raspodele vektora jačine električnog polja, potencijala i napona, kao i Kulonovih (tj. elektrostatičkih) sila, u **homogenom dielektriku** permitivnosti ϵ_r manje su ϵ_r puta nego kada se ista naelektrisanja, tela i površi nalaze u vakuumu.*
- (3) *Kapacitivnost kondenzatora sa **homogenim dielektrikom** relativne permitivnosti ϵ_r veća je ϵ_r puta nego kapacitivnost istog kondenzatora sa vakuumom kao dielektrikom.*
- (4) *Svi ranije izvedeni rezultati vezani za vakuum kao sredinu, važiće i u **homogenim dielektricima**, stim što je u svim relacijama ϵ_0 potrebno zameniti sa $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$.*

Za prostornu raspodelu slobodnih naelektrisanja okarakterisanu zapreminskom gustinom ρ_s i domen V ograničen zatvorenom površi S , može se napisati sledeća implikacija:

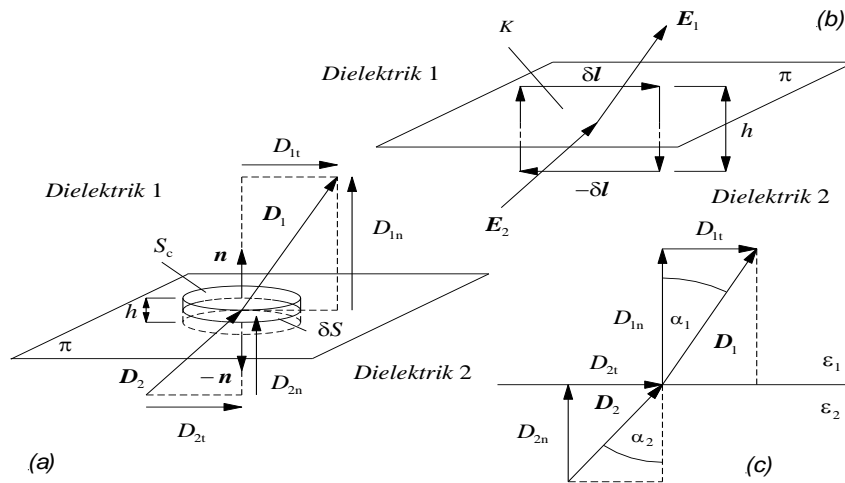
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_V \text{div } \mathbf{D} \cdot dV = \oint_V \rho_s \cdot dV = Q_s; \quad \text{Kada } V \rightarrow 0 \Rightarrow \text{div } \mathbf{D} = \rho_s,$$

odakle se zaključuje da *linije elektrostatičke indukcije* polaze, odnosno izviru iz *pozitivnih slobodnih naelektrisanja* ($\rho_s > 0$), a završavaju se, odnosno *poniru* u *negativnim slobodnim naelektrisanjima* ($\rho_s < 0$). U onim tačkama polja gde je $\rho_s = 0$ linije indukcije su *neprekidne*. I da zaključimo: *linije*

električnog polja neprekidne su samo u vakuumu, a u dielektricima izviru iz pozitivnih, a uviru u negativna naelektrisanja, bez obzira da li su ona slobodna ili vezana. Međutim, *linije elektrostatičke indukcije* izviru iz pozitivnih, a uviru u negativna slobodna naelektrisanja. U dielektricima u kojima ne postoje sloboda naelektrisanja *linije elektrostatičke indukcije su neprekidne*.

3. Granični uslovi na razdvojnoj površi dva dielektrika i zakon prelamanja linija polja

Pretpostavimo da na razdvojnoj površi π između dva dielektrika *nema* slobodnih naelektrisanja (sl. 8a) i zatim postavimo orijentisanu cilindričnu površ S_c male osnovice δS i izvodnice koja normalno preseca površ π . Da bi se izveli granični uslovi na sâmoj površi π potrebno je pretpostaviti da u graničnom procesu dužina izvodnice cilindra $h \rightarrow 0$. Neka su \mathbf{D}_1 i \mathbf{D}_2 vektori električnog pomeraja, a \mathbf{E}_1 i \mathbf{E}_2 jačine električnog polja u dielektricima 1 i 2 respektivno — uz presek δS cilindra S_c i površi π . Normalne komponente vektora \mathbf{D}_1 i \mathbf{D}_2 su $D_{1n} = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}$ i $D_{2n} = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}$, respektivno, gde je \mathbf{n} jedinična normala orijentisane površi $\delta S = \delta S \cdot \mathbf{n}$. Iz generalisanog Gausovog zakona sledi:



Sl. 8

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_{S_c} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta S = (D_{1n} - D_{2n}) \cdot \delta S = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}. \quad (*)$$

Pretpostavimo sada da je K orijentisana pravougaona kontura u ravni vektora \mathbf{E}_1 i \mathbf{E}_2 , vrlo male širine $\delta \ell = |\delta \mathbf{l}|$ i visine h koja u graničnom procesu teži nuli (sl. 8b). Takođe, neka je i pravac vektora $\delta \mathbf{l}$ paralelan ravni π . Komponente vektora \mathbf{E}_1 i \mathbf{E}_2 tangencijalne na π respektivno su jednake E_{1t} i E_{2t} . Pošto je elektrostatičko polje bezvrtložno ($\Leftrightarrow \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$), to cirkulacija vektora \mathbf{E} po bilo kojoj konturi mora biti jednaka nuli:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_1 \cdot \delta \mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \delta \mathbf{l} = (E_{1t} - E_{2t}) \cdot \delta \ell = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}. \quad (**)$$

Relacije (*) i (**) ukazuju na neprekidnost normalnih komponenti električnog pomeraja i tangencijalnih komponenti električnog polja na razdvojnoj površi dva dielektrika i one se zovu *granični uslovi*. Koristeći ih zajedno sa sl. 8c može se izvesti *zakon prelamanja linija električnog polja* na razdvojnoj površi dva dielektrika na kojoj ne postoje slobodna naelektrisanja:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{D_{1t} / D_{1n}}{D_{2t} / D_{2n}} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1 \cdot E_{1t}}{\epsilon_2 \cdot E_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

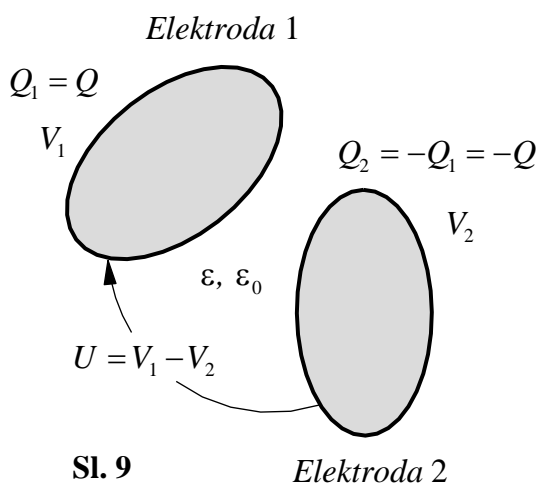
Dakle, pri prelasku iz sredine veće u sredinu manje permitivnosti, linije električnog polja se priklanjaju normalni na razdvojnoj površi.

4. Energija u elektrostatičkom polju

Energija sistema W_e od n metalnih tela u vakuumu, ili u nekom dielektriku, naelektrisanih količinama elektriciteta $Q_i = \pm N_i \cdot |e|$ do potencijala V_i (N_i -prirodan broj, $i = 1, n$), data je izrazom:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \cdot Q_i \leftarrow \text{Energija sistema metalnih naelektrisanih tela}$$

Iz prethodnog izraza vidi se da je elektrostatička energija sistema naelektrisanih metalnih tela funkcija naelektrisanja tih tela i njihovih potencijala. Ako bismo se oslonili samo na formalno tumačenje izraza, lako bismo mogli izvesti pogrešan zaključak da su naelektrisanja, a ne elektrostatičko polje, nosioci energije sistema. Definitivan odgovor na pitanje o tome gde je lokalizovana energija u opštem slučaju elektromagnetskog sistema, nije moguće pružiti u okvirima elektrostatike, već isključivo izučavanjem *promenljivih elektromagnetskih polja*.



Elektrostatička energija W_c kondenzatora kapacitivnosti C (sl. 9) sa proizvoljnim dielektrikom i metalnim elektrodama proizvoljnog oblika, gde je $\pm Q$ naelektrisanje elektroda, a $U = V_1 - V_2$ napon između pozitivne i negativne elektrode je

$$\begin{aligned} W_c = W_e &= \frac{1}{2} (V_1 \cdot Q_1 + V_2 \cdot Q_2) = \\ &= \frac{1}{2} (V_1 - V_2) \cdot Q = \frac{1}{2} U \cdot Q = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{Q^2}{2C} \end{aligned}$$

Sl. 9

Elektroda 2

Detaljnija analiza pojava u elektrostatičkim sistemima pokazuje da je energija tih sistema u opštem slučaju lokalizovana u elektrostatičkom polju i da su *lokalna vrednost* njene *zapreminske gustine* w_e , kao i ukupna energija W_e u domenu V , u opštem slučaju (dakle, nezavisno od homogenosti, linearnosti i izotropnosti dielektrika) dati izrazima:

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \leftarrow \text{Lokalna vrednost zapreminske gustine energije polja (u tačkama);}$$

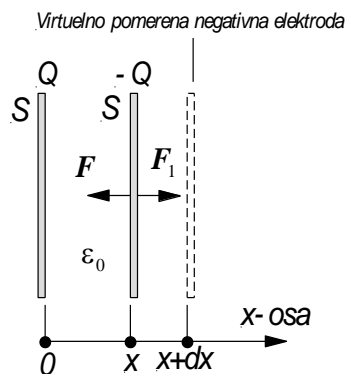
$$W_e = \oint_V w_e \cdot dV = \frac{1}{2} \oint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \cdot dV \leftarrow \text{Ukupna energija elektrostatičkog polja u domenu } V;$$

5. Sile i pritisci u elektrostatičkom polju

Pretpostavimo da je potrebno odrediti rezultantnu silu koja deluje na neki od dva ili više *naelektrisanih provodnika* proizvoljnog oblika koji se nalaze u proizvoljnom međusobnom položaju u vakuumu ili u nekom dielektriku. Ako bismo problem pokušali da rešimo pomoću Kulonovog zakona, naišli bismo na skoro nepremostive teškoće čak i kod pločastog kondenzatora. Za svaki par površinskih elemenata naelektrisanih tela prvo se moraju odrediti elementarne Kulonove sile njihovog uzajamnog dejstva, a zatim je potrebno izvršiti *vektorsku integraciju* tih sila. Samo određivanje raspodele naelektrisanja na telima je vrlo težak i numerički zahtevan problem. Međutim, sve te poteškoće mogu se izbeći primenom prilično jednostavnog, a ipak opšteg postupka, zasnovanog na principu malih virtuelnih pomeraja i zakona o održanju rada, odnosno energije.

Princip virtuelnog pomeraja primenićemo kod pločastog kondenzatora sa vakuumom kao dielektrikom. Neka je površina svake elektrode S (sl. 15a), a rastojanje x između njih neka je znatno manje od lineičnih dimenzija elektroda. Pretpostavimo da je *kondenzator van kola* tako da je

naelektrisanje ploča $\pm Q$ ($Q > 0$) konstantno. Kapacitivnost kondenzatora je $C = \epsilon_0 S/x$, a njegova energija je $W_c = Q^2/(2C) = (Q^2 x)/(2\epsilon_0 S)$. Pretpostavimo sada da neka spoljašnja mehanička sila F_1 savlada elektrostatičku F i da za dx translatorno pomeri negativnu elektrodu u pravcu i smeru x -ose. Prema zakonu o održanju energije zaključujemo da se tada izvršeni rad sile $F_1 = F_1 \cdot \mathbf{i}$ (\mathbf{i} -ort x -ose) protiv elektrostatičke sile F potpuno pretvara u priraštaj elektrostatičke energije kondenzatora dW_c :



Sl. 15)

$$dW_c = F_1 \cdot (\mathbf{i} \cdot d\mathbf{x}) = F_1 \cdot dx = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} (x + dx) - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} x = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} dx \Rightarrow F_1 = \frac{dW_c}{dx} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{W_c}{x}.$$

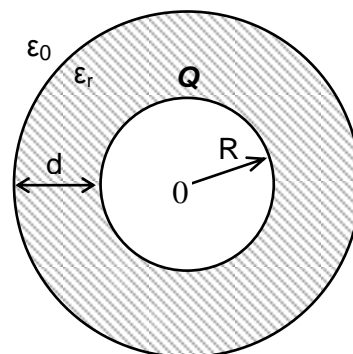
Uslov ravnoteže spoljašnje mehaničke sile F_1 i elektrostatičke (Kulonove) F glasi $F + F_1 = 0$ ($F = F \cdot \mathbf{i}$), odakle sledi $F = -F_1 = -Q^2/(2\epsilon_0 S) = -W_c/x$. Znak minus ukazuje da je rezultantna Kulonova sila privlačnog karaktera, tj. da je njen smer suprotan od x -ose. Očigledno je i da se njen intenzitet kod pločastog kondenzatora može odrediti kao podužna gustina elektrostatičke energije. Pošto je u pitanju rezultantna sila koja potiče od međusobnog dejstva elementarnih naelektrisanja ravnomerno raspodeljenih na pločama, to će i dejstvo elementarnih Kulonovih sila na ploče, takođe biti ravnomerno raspodeljeno po njihovim površinama. Zato je pritisak Kulonovih sila na elektrode:

$$p = \frac{|F|}{S} = \frac{W_c}{S \cdot x} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S^2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = w_e,$$

i on odgovara zapreminskoj gustini energije elektrostatičkog polja. Prethodno dobijeni izraz za pritisak je sasvim generalan i važi, čak i kada su elektrode proizvoljnog oblika, a polje nehomogeno. Pritisak na površ naelektrisanog objekta uvek je negativan ("čupanje") bez obzira na prirodu njegovog naelektrisanja, jer sile polja uvek imaju tendenciju da izvrše takvo pomeranje objekata kojim se minimizira energija sistema (u skladu sa Thomsonovom teoremom).

1. zadatak: Oko tanke usamljene metalne sfere poluprečnika $R=10[\text{cm}]$, naelektrisane količinom neelektrisanja $Q=10[\text{nC}]$, nalazi se sloj homogenog dielektrika debljine $d=5[\text{cm}]$, relativne dielektrične permitivnosti $\epsilon_r=4$, koji je koncentrično postavljen u odnosu na sferu. Sredina je vakuum. Odrediti:

- Vektore dielektričnog pomeraja i jačine elektrostatičkog polja u čitavom prostoru.
- Potencijal metalne sfere.
- Kapacitivnost metalne sfere.



Rešenje:

a) Neka je \mathbf{r} osa orijentisana kao na slici. Na površini metalnog tela postoji samo normalna komponenta vektora jačine polja, pa je vektor \mathbf{E}_1 a samim tim i \mathbf{D}_1 upravan na metalnu sferu. Neka su \mathbf{E}_1 i \mathbf{D}_1 vektori jačine električnog polja i pomeraja u dielektriku, a \mathbf{E}_0 i \mathbf{D}_0 odgovarajući vektori u vakuumu. Kako je dielektrik homogen i linearan (opisan je sa ϵ_r) važi $\mathbf{D}_1 = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}_1$ u dielektriku, odnosno $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ u vakuumu. Dakle vektori \mathbf{D} i \mathbf{E} su kolinearni u čitavom prostoru oko metalne sfere. Na osnovu prethodnog razmatranja ucrtani su referentni smerovi vektora \mathbf{E} i \mathbf{D} u dielektriku i vakuumu.

Primetimo da su vektori \mathbf{E} i \mathbf{D} normalni na razdvojnu površinu dielektrik–vakuum. Vakuum je, kao što nam je već poznato, takođe dielektrik. Primenom prvog graničnog uslova o jednakosti normalnih komponenti vektora \mathbf{D} na graničnoj površini dva dielektrika i činjenice da su vektori \mathbf{D}_1 i \mathbf{D}_0 upravni na graničnu površ dobijamo:

$$\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{0n} \quad \wedge \quad (\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_{1n} \wedge \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_{0n}) \Rightarrow \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}.$$

Dakle, vektor \mathbf{D} se ne „prelama“ pri prelasku iz dielektrika u vakuum. Jednakost vektora \mathbf{D} u obe sredine povlači nejednakost vektora jačine električnog polja \mathbf{E} u dielektriku i vakuumu.

Neka je $\mathbf{D} = D(r) \cdot \mathbf{r}_0$, gde je \mathbf{r}_0 jedinični vektor \mathbf{r} ose. Primenom generalisanog Gausovog zakona na zamišljenu sfernu površ poluprečnika $r > R$, možemo izračunati intenzitet vektora \mathbf{D} .

$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{slobodno}$. Zbog simetrije, vektor \mathbf{D} je homogen na celoj površini sfere S i ima isti pravac i smer kao i vektor $d\mathbf{S}$, pa je

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S D \cdot d\mathbf{S} = D(r) \cdot 4\pi r^2 = Q, \text{ tj.}$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad r \geq R, \quad \mathbf{D} = D(r) \cdot \mathbf{r}_0.$$

Vektor jačine električnog polja \mathbf{E} je :

$$\mathbf{E}_1(r) = \frac{D(r)}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad \mathbf{E}_1(r) = E_1(r) \cdot \mathbf{r}_0, \quad R \leq r \leq R+d, \text{ u dielektriku, odnosno}$$

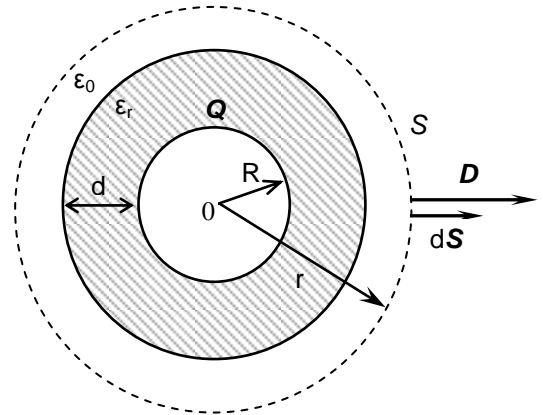
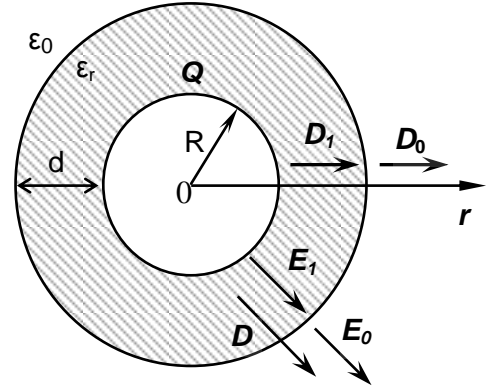
$$\mathbf{E}_0(r) = \frac{D(r)}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad \mathbf{E}_0(r) = E_0(r) \cdot \mathbf{r}_0, \quad R+d \leq r \leq \infty, \text{ u vakuumu.}$$

Unutar metalne sfere je $\mathbf{E} = \mathbf{D} = 0$, za $r < R$.

b) Potencijal metalne sfere je najjednostavnije odrediti ako za putanju integracije odaberemo pravac i smer \mathbf{r} ose:

$$V_s = V(r=R) = \int_{r=R}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_R^{R+d} \mathbf{E}_1(r) \cdot d\mathbf{r} + \int_{R+d}^{\infty} \mathbf{E}_0(r) \cdot d\mathbf{r} = \int_R^{R+d} E_1(r) \cdot dr + \int_{R+d}^{\infty} E_0(r) \cdot dr$$

$$V_s = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_r} \int_R^{R+d} \frac{dr}{r^2} + \int_{R+d}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) + \frac{1}{R+d} \right] = 675[\text{V}]$$



$$c) C = \frac{Q}{V_s} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) + \frac{1}{R+d}} = 14.8[\text{pF}]$$

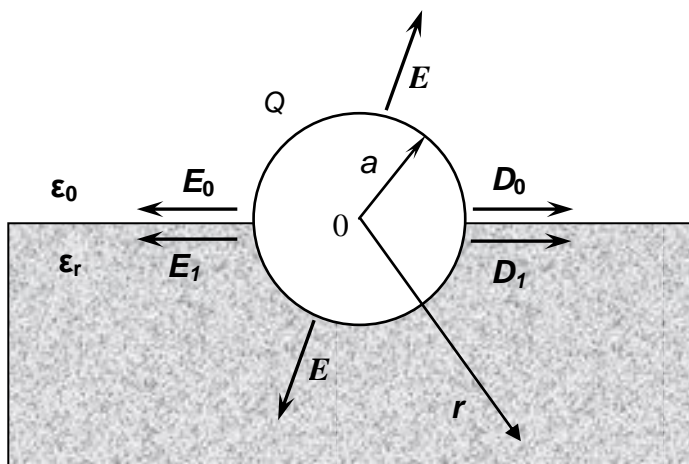
2. zadatak: Rešiti prethodni zadatak za usamljenu metalnu sferu okruženu vazdušnim dielektrikom.

Uputstvo: Uvrstiti $\epsilon_r = 1$ u prethodne relacije čime se sloj homogenog dielektrika zamenjuje vazduhom.

3. zadatak: Jedna polovina usamljene metalne sfere poluprečnika $a=1[\text{cm}]$, naelektrisane količinom elektriciteta $Q=1[\text{nC}]$, nalazi se u beskonačnom, homogenom dielektriku relativne permitivnosti $\epsilon_r = 17$, dok je druga polovina u vazduhu. Izračunati:

- Jačinu električnog polja u čitavom prostoru oko sfere
- Potencijal sfere
- Kapacitivnost sfere

Rešenje:



Postupajući analogno kao u zadatku 1, na slici su sa E_1 i D_1 označeni referentni smerovi vektora jačine električnog polja i pomeraja u dielektriku, a sa E_0 i D_0 odgovarajući vektori u vazduhu.

Primenom drugog graničnog uslova o jednakosti tangencijalnih komponenti vektora jačine polja E na graničnoj površi dva dielektrika i činjenice da su vektori E_1 i E_0 paralelni razdvojnoj površi dobijamo:

$$E_{1tg} = E_{0tg} \quad \wedge \quad (E_1 = E_{1tg} \wedge E_0 = E_{0tg}) \\ \Rightarrow E_1 = E_0 = E.$$

Dakle, vektor E se ne „prelama“ na graničnoj površini dielektrik-vazduh. Jednakost vektora E u obe sredine povlači nejednakost vektora D u dielektriku i vazduhu. U dielektriku je $D_1 = \epsilon_0 \epsilon_r E$, a u vazduhu $D_0 = \epsilon_0 E$.

Neka je $D = D(r) \cdot r_0$, gde je r_0 jedinični vektor r ose. Primenom generalisanog Gausovog zakona $\oint_S D \cdot dS = Q_{slobodno}$ na zamišljenu sfernu površ poluprečnika $r > a$, možemo odrediti intenzitet vektora D . Zbog simetrije, vektor D_0 je homogen na površini polusfere S_0 u vazduhu, a vektor D_1 je homogen na površini polusfere S_1 u dielektriku, pa važi

$$\oint_{S=S_0 \cup S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_0} \mathbf{D}_0 \cdot d\mathbf{S}_0 + \int_{S_1} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 =$$

$$= \int_{S_0} \mathbf{D}_0 \cdot d\mathbf{S}_0 + \int_{S_1} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = 2\pi r^2 (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_0) = Q$$

Kako je $\mathbf{D}_1(r) = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(r)$ i $\mathbf{D}_0(r) = \epsilon_0 \mathbf{E}(r)$

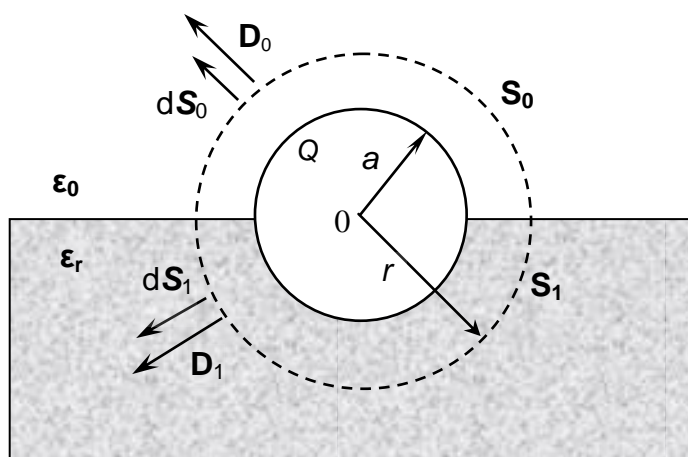
zamenom se dobija

$$2\pi r^2 (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_0) = 2\pi r^2 \epsilon_0 \mathbf{E}(r) (1 + \epsilon_r) = Q,$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 (1 + \epsilon_r)} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad a \leq r,$$

$$\mathbf{E}(r) = E(r) \cdot \mathbf{r}_0.$$

Unutar metalne sfere $\mathbf{E} = \mathbf{D} = 0$, za $r < a$.

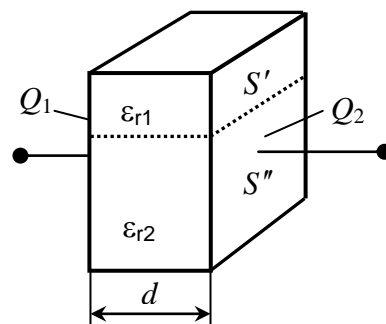


$$\text{b) } V_s = V(r=a) = \int_{r=a}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^{\infty} E(r) \cdot dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 (1 + \epsilon_r)} \cdot \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 (1 + \epsilon_r)} \cdot \frac{1}{a} = 100[\text{V}].$$

$$\text{c) } C = \frac{Q}{V_s} = 2\pi \epsilon_0 (1 + \epsilon_r) a = 10[\text{pF}].$$

4. zadatak: Pločasti kondenzator ispunjen je sa dva dielektrika, pri čemu je $S' = 10[\text{cm}^2]$, $S'' = 15[\text{cm}^2]$; $d = 1[\text{mm}]$, $\epsilon_{r1} = 3$, $\epsilon_{r2} = 5$. Naelektrisanja ploča kondenzatora su $Q_1 = -Q_2 = 4[\text{nC}]$. Odrediti:

- Vektor jačine električnog polja u kondenzatoru.
- Kapacitivnost ovog kondenzatora.



Rešenje:

a) Kako je razdvojna površina dielektrika normalna na ploče kondenzatora, to je vektor jačine električnog polja tangencijalan na razdvojnu površinu.

Iz drugog graničnog uslova sledi:

$$\mathbf{E}_{1tg} = \mathbf{E}_{2tg} \quad \wedge \quad (\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1tg} \wedge \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2tg}) \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}.$$

Kako su oba dielektrika linearna i homogena važi:

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon_1 \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \mathbf{E} \quad \text{ i } \quad \mathbf{D}_2 = \epsilon_2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \mathbf{E}.$$

Primenom generalisanog Gausovog zakona, $\oint_{S=S' \cup S''} \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q$,

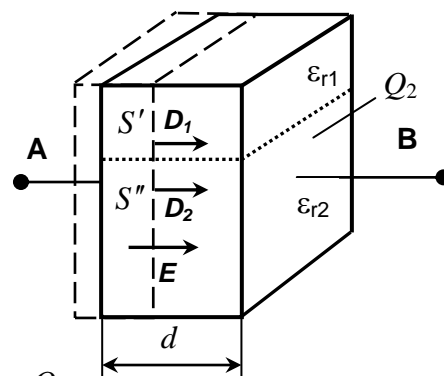
na zamišljenu površ S oblika kvadra dobija se:

$$\oint_{S=S' \cup S''} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_{S'} \mathbf{D}_1 d\mathbf{S}' + \int_{S''} \mathbf{D}_2 d\mathbf{S}'' = \int_{S'} \mathbf{D}_1 d\mathbf{S}' + \int_{S''} \mathbf{D}_2 d\mathbf{S}'' = D_1 S' + D_2 S'' = Q.$$

Ako intenzitet vektora \mathbf{D} izrazimo preko \mathbf{E} dobijamo

$$Q = D_1 S' + D_2 S'' = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E \cdot S' + \epsilon_0 \epsilon_{r2} E \cdot S'' = (\epsilon_0 \epsilon_{r1} S' + \epsilon_0 \epsilon_{r2} S'') E,$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot S' + \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot S''} = 43 \cdot 10^3 [\text{V/m}] \quad \text{sa pravcem i smerom kao na slici.}$$



b) Da bi se odredila kapacitivnost kondenzatora, potrebno je odrediti napon između ploča kondenzatora 1 i 2, odnosno:

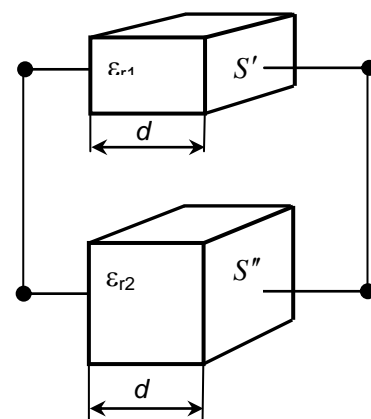
$$U_{AB} = \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E \cdot d = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot S' + \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot S''} \cdot d = 43 [\text{V}]$$

Kapacitivnost kondenzatora je onda:

$$C = Q/U_{AB} = \epsilon_0 \epsilon_{r1} S'/d + \epsilon_0 \epsilon_{r2} S''/d \approx 93 [\text{pF}]$$

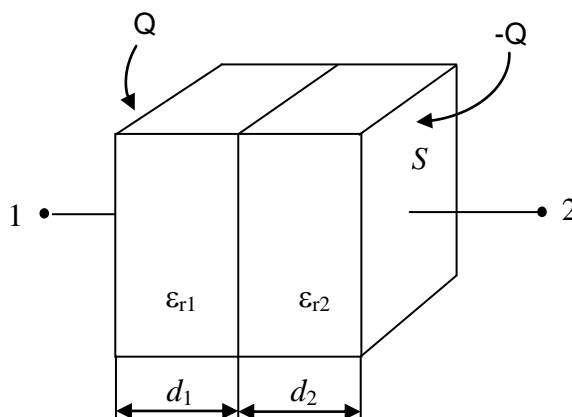
Analizirajući gore navedeni izraz vidi se da se ovaj kondenzator može predstaviti kao paralelna veza dva pločasta kondenzatora svaki sa homogenim dielektrikom čije su kapacitivnosti:

$$C' = \epsilon_0 \epsilon_{r1} S'/d \text{ i } C'' = \epsilon_0 \epsilon_{r2} S''/d.$$



5. zadatak: U pločastom kondenzatoru površine ploča $S=20[\text{cm}^2]$ i naelektrisanja elektroda $Q_1=-Q_2=Q=10[\text{nC}]$, nalaze se dva homogena dielektrika debljine $d_1=2[\text{mm}]$ i $d_2=3[\text{mm}]$. Razdvojna površina dielektrika paralelna je pločama kondenzatora. Relativne dielektrične konstante ovih dielektrika su: $\epsilon_{r1}=3$ i $\epsilon_{r2}=9$. Odrediti:

- vektor dielektričnog pomeraja i vektor jačine električnog polja;
- kapacitivnost ovog kondenzatora.



Rešenje:

a) S obzirom da je razdvojna površina između dielektrika paralelna pločama kondenzatora i da su vektor jačine električnog polja i vektor dielektričnog pomeraja upravni na ploče kondenzatora, to su ovi vektori upravni i na razdvojnu površinu dielektrika. Iz prvog graničnog uslova sledi

$$\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n} \wedge (\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_{1n} \wedge \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_{2n}) \Rightarrow \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}.$$

Dakle, vektor \mathbf{D} je isti u oba dielektrika. Njegov intenzitet možemo odrediti primenom generalisanog Gausovog zakona na zamišljenu površ oblika kvadra kao u prethodnom zadatku:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = DS = Q.$$

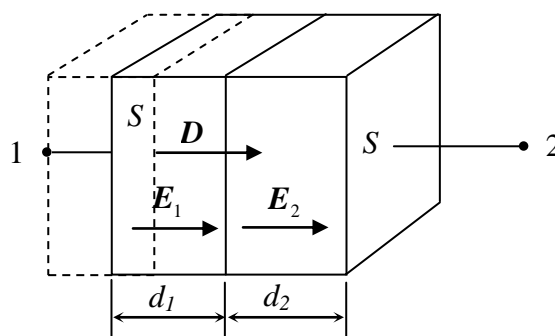
$D = Q/S = 5 \cdot 10^{-6} [\text{C/m}^2]$, a pravac i smer su upravni na ploče kondenzatora.

Jačine električnog polja različite su u dielektricima:

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} = 188 \cdot 10^3 [\text{V/m}], \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} = 63 \cdot 10^3 [\text{V/m}], \text{ a pravac i smer vektora jačine}$$

električnog polja upravan je na ploče kondenzatora.

b) Napon između pozitivne i negativne ploče kondenzatora je:



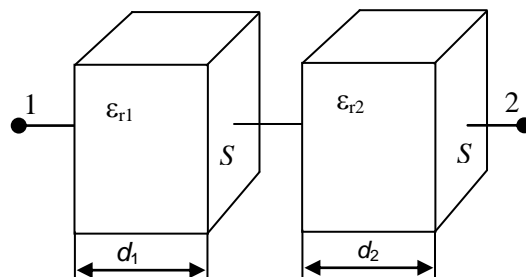
$$U_{12} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \cdot d_1 + \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \cdot d_2 \approx 564[\text{V}]$$

Kapacitivnost kondenzatora je:

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{D \cdot S}{D \cdot \left(\frac{d_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \right)} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} \frac{S}{d_1} + \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} \frac{S}{d_2}} = 18[\text{pF}]$$

Ovaj kondenzator može se ekvivalentirati rednom vezom dva kondenzatora svaki sa homogenim dielektrikom, kapacitivnosti C_1 i C_2 :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{S}{d_1}} + \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} \frac{S}{d_2}}.$$



6. zadatak: Između elektroda pločastog vazdušnog kondenzatora površine $S=40[\text{cm}^2]$ i rastojanja $d=4[\text{mm}]$, uspostavljena je potencijalna razlika $U=500[\text{V}]$.

- Odrediti jačinu, pravac i smer elektrostatičke sile na elektrode kondenzatora.
- Odrediti rad te elektrostatičke sile, ukoliko se jedna elektroda kondenzatora translatorno pomeri za $x=1[\text{mm}]$.

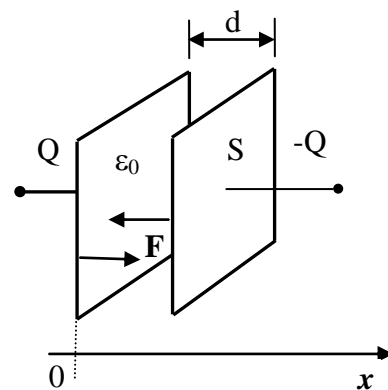
Rešenje:

- Na ploče kondenzatora deluje privlačna, upravna sila. Intenzitet sile jednak je apsolutnoj vrednosti parcijalnog izvoda elektrostatičke energije po promenljivoj koordinati x , odnosno:

$$F = \left| \frac{\partial W}{\partial x} \right| = \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{1}{2} C(x) \cdot U^2 \right| = \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{x} \cdot U^2 \right| = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{x^2} \cdot U^2$$

Kako se ploče nalaze na međusobnom rastojanju $d=4[\text{mm}]$, sila koja deluje na ploče dobija se zamenom $x = d = 4[\text{mm}]$ u izraz za silu:

$$F(x=d) = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d^2} \cdot U^2 = 0,28[\text{mN}].$$



- Rad koji izvrši elektrostatička sila pri pomeranju elektrode kondenzatora za $x=1[\text{mm}]$, jednak je priraštaju elektrostatičke energije kondenzatora zbog pomeranja te elektrode:

$$A = \Delta W = W_1 - W_0 = \frac{1}{2} C_1 U^2 - \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{U^2}{2} (C_1 - C_0)$$

Kako je:

$$C_1 = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d-x} \quad \text{i} \quad C_0 = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d},$$

sledi:

$$C_1 - C_0 = \epsilon_0 \cdot S \cdot \left(\frac{1}{d-x} - \frac{1}{d} \right) = \epsilon_0 \cdot S \cdot \frac{x}{d \cdot (d-x)}.$$

Sada je:

$$A = \Delta W = \frac{U^2}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot S \cdot \frac{x}{d \cdot (d-x)} = 0,37 [\mu\text{J}] .$$

Do istog rezultata moglo se doći i preko definicionog izraza za rad $A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$, koristeći zraz za silu određen u prethodnoj tački:

$$A = \int_d^{d-x} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{x^2} U^2 dx = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S U^2 \int_d^{d-x} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S U^2 \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_d^{d-x} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S U^2 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d-x} \right) = 0,37 [\mu\text{J}] .$$